1.14) a) $F = \{ \underbrace{1}_{F_1}, \underbrace{sen(x)}_{F_2}, \underbrace{cos(x)}_{F_3} \}$

Me fijo si es LI con el Wronskiano.

Como tiene tres elementos, tengo que derivar dos veces.

$$\begin{cases} F_1'(x) = 0, \; F_1''(x) = 0 \\ F_2'(x) = cos(x), \; F_2''(x) = -sen(x) \\ F_3'(x) = -sen(x), \; F_3''(x) = -cos(x) \end{cases}$$

Armo matriz del Wronskiano:

$$W(F) = \begin{vmatrix} 1 & sen(x) & cos(x) \\ 0 & cos(x) & -sen(x) \\ 0 & -sen(x) & -cos(x) \end{vmatrix}$$

Pruebo con $x_0 = 0 \in DF$.

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Calculo det. por cofactores (1ra columna) [también como está triangulada superiormente podría hacer el prod. de los elem. de la diagonal principal]

$$W(0) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) = -1 \neq 0$$

Como para un $x_0 \in DF$ me dio $\neq 0$, es LI.

b) $S = \{ \underbrace{1 + 3\,sen(x) - 2\cos(x)}_{S_1},\ \underbrace{3 + 5\,sen(x) - 6\cos(x)}_{S_2},\ \underbrace{-5\,sen(x) + 6\cos(x)}_{S_3} \}$

Voy a ver si es LI con el Wronskiano.

Como tiene 3 elementos, tengo que derivar 2 veces c/u.

$$\begin{cases} S_1'(x) = 3\cos(x) + 2\,sen(x), & S_1''(x) = -3\,sen(x) + 2\cos(x) \\ S_2'(x) = 5\cos(x) + 6\,sen(x), & S_2''(x) = -5\,sen(x) + 6\cos(x) \\ S_3'(x) = -5\cos(x) - 6\,sen(x), & S_3''(x) = 5\,sen(x) - 6\cos(x) \end{cases}$$

Armo matriz del Wronskiano.

$$W(S(x)) = \begin{vmatrix} 1+3\,sen(x)-2\cos(x) & 3+5\,sen(x)-6\cos(x) & -5\,sen(x)+6\cos(x) \\ 3\cos(x)+2\,sen(x) & 5\cos(x)+6\,sen(x) & -5\cos(x)-6\,sen(x) \\ -3\,sen(x)+2\cos(x) & -5\,sen(x)+6\cos(x) & 5\,sen(x)-6\cos(x) \end{vmatrix}$$

Pruebo con $x_0 = 0 \in D_S$

$$W(S(0)) = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 6 \\ 3 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -6 \end{vmatrix}$$

Calculo det. por cofactores (1ra columna):

$$W(S(0)) = -1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -5 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} \to$$

$$\to W(S(0)) = -1 \cdot 0 - 3 \cdot (-18) + 2 \cdot (-15) = 54 - 30 = 24 \neq 0$$

Como para un $x_0 \in D_S$ me dio $\neq 0$, es LI.

1.14) c) Veo si es LI por definición:

$$\alpha_1(1+2\,\text{sen}(x)+3\cos(x)) + \alpha_2.(4+5\,\text{sen}(x)+7\cos(x)) + \alpha_3.(2+\text{sen}(x)+\cos(x)) = 0.$$

$\cancel{\alpha_1 + \alpha_1.2\,\text{sen}(x) + \alpha_1.3\cos(x) + \alpha_2 4 + \alpha_2.5\,\text{sen}(x) + \alpha_2.(}$

$$(\alpha_1+4\alpha_2+2\alpha_3) + (2\alpha_1+5\alpha_2+\alpha_3)\,\text{sen}(x) + (3\alpha_1+7\alpha_2+\alpha_3)\cos(x) = 0.$$

Como $\{1, \text{sen}(x), \cos(x)\}$ es LI (calculado en a)) entonces:

$$\begin{cases} \alpha_1+4\alpha_2+2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1+5\alpha_2+\alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1+7\alpha_2+\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ F2 \to 2F1-F2 \\ F3 \to 3F1-F3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} F3 \to 5F2-3F3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} \alpha_1+4\alpha_2+2\alpha_3 = 0 \to \alpha_1-4\alpha_3+2\alpha_3=0 \to \alpha_1 = 2\alpha_3 \\ 3\alpha_2+3\alpha_3 = 0 \to \alpha_2 = -\alpha_3 \end{matrix}$$

Por lo tanto este conjunto, como no me dio la solución trivial y hay una ~~[illegible]~~ dependencia entre los escalares, es LD.